[21-BS 532-7A]

AT THE END OF FIFTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – V – 7A – **MATHEMATICAL SPECIAL FUNCTIONS**

(COMMON FOR B.A., B.Sc)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted Batch 2020–2021)

Time: 3 Hours

Max. Marks: 75

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Prove that $\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$.

   $\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$ అని నిరూపించండి.

2. Show that $x = 0$ is an ordinary point of $(x^2-1)y'' + xy' - y = 0$ but $x = 1$ is a regular singular point.

   $(x^2-1)y'' + xy' - y = 0$ నకు $x = 0$ సాధారణ బిందువు అని $x = 1$ సాధారణ ఏక బిందువు అని చూపండి.

3. Prove that $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$.

   $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$ అని నిరూపించండి.

4. Prove that $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$.

   $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ అని నిరూపించండి.

5. Prove that $\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = x^{-n} J_{n+1}(x)$.

   $\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = x^{-n} J_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

6. Show that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

   $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ అని చూపండి.

7. Find the radius of convergence of the series $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{2!}{3^3}x^3 + \frac{3!}{4^4}x^4 + \cdots + \cdots$

   $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{2!}{3^3}x^3 + \frac{3!}{4^4}x^4 + \cdots + \cdots$ అభిసరణీయత యొక్క వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.

8. Prove that $x^5 = \frac{1}{32}H_5(x) + \frac{5}{8}H_3(x) + \frac{15}{8}H_1(x)$.

   $x^5 = \frac{1}{32}H_5(x) + \frac{5}{8}H_3(x) + \frac{15}{8}H_1(x)$ అని నిరూపించండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions.

9. (a) Show that $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

   $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ అని చూపండి.

   Or

   (b) Prove that $\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}(2m)$ where $m \in Z$ is an integer.

   $\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}(2m)$; $m \in Z$ అని నిరూపించండి.

10. (a) Solve by power series method $y' - y = 0$.

    $y' - y = 0$ సమీకరణమును శక్తి ప్రమేయము పద్ధతిలో సాధించండి.

    Or

    (b) Solve by the power series method $y'' - xy' = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.

    $y'' - xy' = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ సమీకరణమును శక్తి ప్రమేయము పద్ధతిలో సాధించండి.

11. (a) Prove that $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$.

    $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

    Or

    (b) State and prove Rodrigue's formula for Hermite polynomials.

    హెర్మైట్ ప్రమేయము యొక్క రొడ్రిగ్ సూత్రమును రాసి నిరూపించండి.

12. (a) State and prove Orthogonal properties of $P_n(x)$.

$P_n(x)$ యొక్క లంబ ధర్మమును వ్రాసి నిరూపించండి.

Or

(b) (i) Prove that $(1-x^2)P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$

$(1-x^2)P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$ అని నిరూపించండి.

(ii) Show that $P_n(1) = 1, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

$P_n(1) = 1, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ అని చూపండి.

13. (a) (i) Prove that $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$.

$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$ అని నిరూపించండి.

(ii) Prove that $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$ అని నిరూపించండి.

Or

(b) (i) Prove that $J_n'(x) = \frac{2}{x}\left[\frac{n}{2}J_n - (n+2)J_{n+2} + (n+4)J_{n+4} - \cdots\right]$

$J_n'(x) = \frac{2}{x}\left[\frac{n}{2}J_n - (n+2)J_{n+2} + (n+4)J_{n+4} - \cdots\right]$ అని నిరూపించండి.

(ii) Prove that $\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}] = x[J_n^2 - J_{n+1}^2]$

$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}] = x[J_n^2 - J_{n+1}^2]$ అని నిరూపించండి.

JANUARY-2024

SEMESTER-V

FINAL EXAMINATION PAPER